Intégrales

Tableau des primitives

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I. On note F une primitive de f sur I

F(x)	F(x)		Forme de f	Forme de F
x^{α} $\alpha \in IR$; $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$		U' + V'	U + V
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$		k.U'	k.U
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$		U'V + UV'	UV
cos(ax+b) $a \neq 0$	$\frac{1}{a}$.sin(ax+b)		$U'.U^{\alpha}$ $\alpha \in IR$; $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} U^{\alpha+1}$
sin(ax+b) $a \neq 0$	$-\frac{1}{a}$.cos(ax+b)		$\frac{U'}{U}$	$\ln \lvert U \rvert$
$\frac{1}{cos^2 x}$	tan x		$U'.e^{U}$	e^{U}
e^{x}	e^{x}		U'. V'(U)	V(U)
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}.e^{ax+b}$		$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\sqrt{U}$
ln x	x.ln x - x			

Intégrales

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I. On appelle intégrale de f entre a et b, le réel noté et défini par : $\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I.

Remarque

Si $a \leq b$ alors le réel $\int_a^b f(t)dt$ est dit aussi, intégrale de f sur [a,b].

© najah.com®

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des réels de I. On a alors :

- $\int_a^a f(t)dt = 0$.
- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
- $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$.
- $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$.
- Si a≤b et f est positive sur [a,b] alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- Si a≤b et f≤g sur [a,b] alors : $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- Si a≤b alors : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
- Si I est centré en 0 et f est paire alors pour tout a∈I, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si I est centré en 0 et f est impaire alors pour tout a∈I, $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
- Si I=□ et est périodique de période T alors pour tout réel a, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur I. Alors pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

Valeur moyenne :

Définition :

Soit f une fonction continue sur [a,b] où a<b. On appelle valeur moyenne de f sur [a,b] le réel noté et défini par : $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a,b] où a<b. S'il existe deux constantes réelles m et M telles que pour tout x∈[a,b], m≤f(x)≤M, alors m≤ $\bar{f}$ ≤M.

Conséquence :

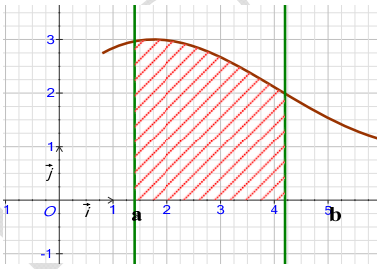
Soit f une fonction continue sur [a,b] où a<b. Il existe c∈[a,b] tel que f(c)= $\bar{f}$.

Fonctions définies par intégrale :

© najah.com®

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a∈I, alors la fonction F définie sur I par : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et F'(x)=f(x). F n'est autre que la primitive de f sur I qui s'annule en a.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que u(I)⊂J où J et un intervalle contenant un réel a. Si f est une fonction continue sur J alors, la fonction F définie sur I par : $F(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et F'(x)=f(u(x))×u'(x).

Calcul d'aires et de volumes :



- Si f est continue et positive sur [a,b] alors l'aire A, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites x=0 et x=b est donné par : $A=\int_a^b f(t)dt$.
- Si f est continue sur [a,b] alors l'aire A, en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites x=a et x=b est donnée par : $A=\int_a^b |f(t)|dt$.
- Si f et g sont continues sur [a,b] alors l'aire A, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites x=0 et x=b est donné par : $A=\int_a^b |f(t)-g(t)|dt$.
- Si f est continue sur [a,b] alors le volume V, en unité de volume, du solide de révolution engendré par rotation de la partie de C_f sur [a,b] autour de l'axe des abscisses est donné par : $V=\pi\int_a^b (f(t))^2 dt$.

© najah.com